ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2012. május 8.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$S_6 = -63$	2 pont	*Ha a vizsgázó jól felírja a sorozat elemeit vagy a mértani sorozat összegképletébe jól helyettesíti be az adatokat, de rosszul számol, akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

2. első megoldás		
Az *f* egyenes egy normálvektora a $(2;-1)$ vektor, ez a vektor az *e* egyenesnek is egy normálvektora.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$2x - y = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2)$	1 pont	*Ez a pont jár az egyenes egyenletének bármely alakjába való jó behelyettesítés esetén.*
Az *e* egyenes egyenlete: $2x - y = 8$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. második megoldás		
Az *f* egyenes meredeksége 2, így az *e* egyenes meredeksége is 2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$-2 = 2 \cdot 3 + b$ egyenletből $b = -8$.	1 pont	
Az *e* egyenes egyenlete: $y = 2x - 8$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A minimum helye: –2.	1 pont	
A minimum értéke: 4.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A) igaz	1 pont	
B) igaz	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
András fizetése az emelés után 156 800 Ft lett.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
$\alpha = 45°$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A kör középpontja: $K(-2;0)$,	2 pont	*Ha csak az egyik koordináta jó, akkor 1 pont jár.*
sugara $r = 3$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8.		
Károly testtömegindexe $\approx 25{,}42$ (kg/m^2).	3 pont	*Ha a vizsgázó a magasságot nem számolja át méterbe, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat. Más helyes kerekítés (pl. 25) is elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

9.		
Két kockával 3-féleképpen lehet a dobott számok összege 4: (1; 3), (2; 2), (3; 1).	1 pont	
Két kockával összesen $6^2 = 36$-félét dobhatunk.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség: $\frac{3}{36} (\approx 0{,}083)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
A logaritmus definíciója alapján: $x^2 = 16$,	1 pont	
a lehetséges *x* értékek: 4,	1 pont	
–4.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó $2\log_2 x = 4$-et, majd ebből $x = 4$-et kap, akkor 1 pontot kaphat.

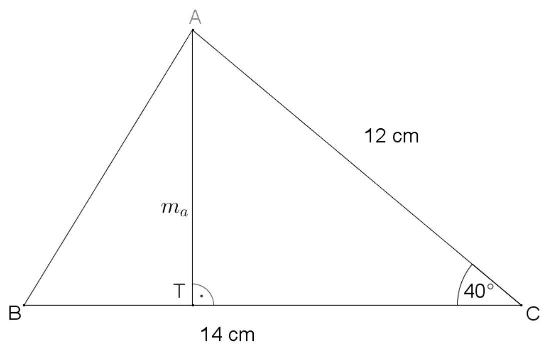
11.		
A tört egyszerűsített alakja: $\frac{x-3}{x+3}$.	3 pont	*Ha a vizsgázó a számlálót, illetve a nevezőt jól alakítja szorzattá, akkor ezért 1-1 pontot kaphat.*
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A helyes válasz betűjele: A.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

II. A

13. a)		
(A hatványozás azonosságainak felhasználásával) $5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 30$.	1 pont	
$30 \cdot 5^x = 30$	1 pont	
$5^x = 1$	1 pont	
(Az 5 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x = 0$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

13. b)		
Az egyenlet bal oldalát közös nevezőre hozva: $\frac{3(x+2)-2x}{x(x+2)} = 1$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első lépésben az egyenlet mindkét oldalát x(x + 2)-vel megszorozza.*
Az egyenlet mindkét oldalát $x(x+2)$-vel szorozva: $3(x+2) - 2x = x(x+2)$.	1 pont	
A zárójelek felbontása és összevonás után: $x + 6 = x^2 + 2x$.	1 pont	
Nullára rendezve: $x^2 + x - 6 = 0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.	2 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

14. a) első megoldás		
 Az *ATC* derékszögű háromszögben $m_a = 12 \cdot \sin 40° \approx$	1 pont	*Ez az 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül jól dolgozik.*
$\approx 7{,}7$ cm.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

14. a) második megoldás		
Az ABC háromszög területe: $T=\frac{12\cdot 14\cdot \sin 40°}{2}$.	1 pont	
Ebből a BC oldalhoz tartozó m_a magasság: $m_a=\frac{12\cdot 14\cdot \sin 40°}{14}\approx 7{,}7\ \text{cm}$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

14. b)		
A háromszög kérdéses oldalára a koszinusztételt felírva:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$AB^2=14^2+12^2-2\cdot 14\cdot 12\cdot \cos 40°$	1 pont	
$AB\approx 9{,}1\ \text{cm}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c) első megoldás		
Az $AEDC$ négyszög trapéz, mert az ED szakasz az ABC háromszögben középvonal, így párhuzamos az AC oldallal.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$ED=6\ \text{(cm)}$	1 pont	
A trapéz magassága az ABC háromszög AC oldalhoz tartozó magasságának a fele.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Az ABC háromszög területe: $T=\frac{12\cdot 14\cdot \sin 40°}{2}(\approx 54\ \text{cm}^2)$.	1 pont	$m_b=14\cdot \sin 40°\approx$
Ebből az AC oldalhoz tartozó m_b magasság: $m_b=\frac{T\cdot 2}{12}\approx 9\ \text{(cm)}$.	1 pont	$\approx 9\ \text{(cm)}$.
Az $AEDC$ trapéz területe: $T=\frac{12+6}{2}\cdot\frac{m_b}{2}\approx$	1 pont	
$\approx 40{,}5\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

14. c) második megoldás		
Az $AEDC$ négyszög területét megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből levonjuk a BDE háromszög területét.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A BDE háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.	1 pont	

A hasonlóság aránya: $\frac{1}{2}$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
így a *BDE* háromszög területe negyede az *ABC* háromszög területének.	1 pont	
Mivel az *ABC* háromszög területe: $T \approx 54$ (cm^2),	1 pont	
ezért a *BDE* háromszög területe ≈ 13,5 (cm^2),	1 pont	
így az *AEDC* trapéz területe ≈ 40,5 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyes kerekítésekkel a kérdéses trapéz területére 40,4 cm^2-t kap eredményül, akkor a megfelelő pontok járnak.
Ha a vizsgázó az egész feladat megoldása során több helyen nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor emiatt összesen 1 pontot veszítsen. Ha a vizsgázó válaszait az egész feladat megoldása során több helyen mértékegység nélkül adja meg, akkor emiatt összesen 1 pontot veszítsen.

15. a)

A nyári olimpiák évszámai egy olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1896, különbsége pedig 4.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
$a_{20} = 1896 + 19 \cdot 4 = 1972$, vagyis 1972-ben tartották a 20. nyári olimpiát.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

15. b)

$1896 + (n-1) \cdot 4 = 2008$	1 pont	*Ez a 2 pont jár, ha a vizsgázó az olimpiák évszámának felsorolásával adja meg a jó választ.*
$n = 29.$ nyári olimpiát tartották 2008-ban.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

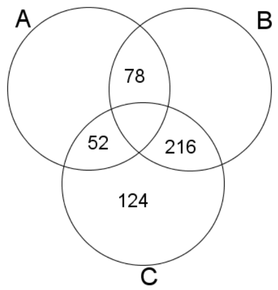
15. c)

(A megadott két adatot egy számtani sorozat első, illetve harmadik tagjának tekintve:) $75 + 2d = 192$,	1 pont	
amiből $d = 58{,}5$.	1 pont	
Így Eszter becslése a sorozat nyolcadik tagjára: $75 + 7d (= 484{,}5) \approx 485$ (millió dollár).	1 pont	
(A megadott két adatot egy mértani sorozat első illetve harmadik tagjának tekintve:) $75q^2 = 192$,	1 pont	
amiből ($q > 0$ miatt) $q = 1{,}6$.	1 pont	
Így Marci becslése a sorozat nyolcadik tagjára: $75q^7 \approx 2013$ (millió dollár).	1 pont	
$1383 - 485 = 898$ és $2013 - 1383 = 630$,	1 pont	
vagyis Marci becslése tér el kisebb mértékben a tényleges adattól.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

II. B

16. a)

	A halmaz	*B* halmaz	*C* halmaz
52	eleme	nem eleme	eleme
78	eleme	eleme	nem eleme
124	nem eleme	nem eleme	eleme
216	nem eleme	eleme	eleme

Minden jól kitöltött sor	1-1 pont	
 Minden jó helyre írt szám:	1-1 pont	*Ha a vizsgázó a táblázat egy sorát hibásan töltötte ki, de az adott számot a feladat szövegének megfelelő tartományba írja, akkor ez a pont sem jár.*
Összesen:	**8 pont**	

16. b)

A három halmaz közös részében azok a pozitív egész számok vannak, melyek 100-nál nem nagyobbak és 3-mal és 4-gyel is (tehát 12-vel) oszthatók.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Ezek a számok: $A \cap B \cap C = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96\}$.	1 pont	*Ez a pont jár, ha a vizsgázó a* $100:12 = 8,\dot{3}$ *művelet eredményére hivatkozik.*
Összesen 8 darab ilyen szám van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. c)

Az *A* halmaz elemeinek a száma: $\lvert A \rvert = 100$.	1 pont	
Ezek közül hárommal osztható (vagyis *B*-nek is eleme) 33 darab.	1 pont	
Néggyel osztható (vagyis *C*-nek is eleme) 25 darab.	1 pont	
Tizenkettővel osztható (vagyis mindhárom halmaznak eleme) 8 darab.	1 pont	
Így az *A* halmaz azon elemeinek a száma, melyek nem elemei sem a *B*, sem a *C* halmaznak: $100 - 33 - 25 + 8 = 50$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{50}{100} = 0,5$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

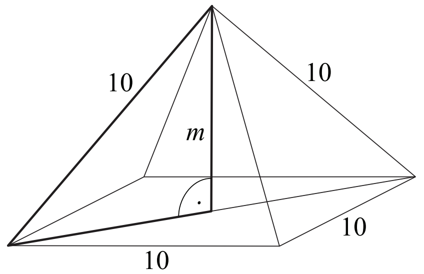
17. a)		
András jegyeinek átlaga 3,8,	1 pont	*Ez a 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel jól számol.*
így jegyeinek szórása $\sqrt{\frac{(3-3{,}8)^2+...+(5-3{,}8)^2}{5}}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}75$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha számológéppel ún. „korrigált szórást” számol (≈ 0,84), akkor 2 pontot kap.

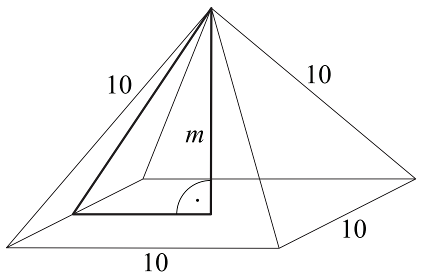
17. b)		
András jegyeinek átlaga 3,8, Bea jegyeinek átlaga 4,6.	1 pont	
Mivel Cili jegyeinek szórása 0, ezért minden jegye azonos.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Így Cilinek minden jegye 4-es.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

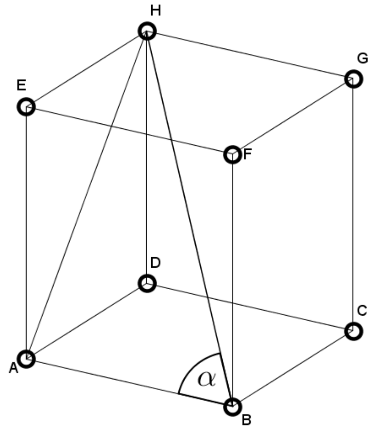
17. c)		
Dávid jegyeinek összege 22,	1 pont	
jegyeit nagyság szerint sorba rendezve a középső 4-es.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
A jegyek között 1-es, 2-es és 3-as nem szerepelhet. Négy darab 4-ese nem lehet, mert akkor a jegyek összege nem lehet 22.	1 pont	*Ez a pont bármilyen helyes indoklás esetén jár.*
Dávid jegyei: 4; 4; 4; 5; 5.	1 pont	
Ezekkel a jegyekkel érettségi bizonyítványát $\binom{5}{2}=$	2 pont	*Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó felsorolja az összes lehetséges esetet.*
$=10$-féleképpen lehet kitölteni.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. d)		
Jeles osztályzatot az osztály $\frac{1}{6}$ része ért el, a hozzájuk tartozó körcikk középponti szöge 60°.	1 pont	
A közepes osztályzatot elérőkhöz tartozó középponti szög $360°-(60°+45°+150°)=105°$,	1 pont	
az ehhez tartozó diákok száma: $\frac{105°}{360°}\cdot 24$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó megállapítja, hogy egy diákhoz 15°-os középponti szög tartozik.*
vagyis közepes osztályzatot 7 diák szerzett.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. a)		
A test alaplapja négyzet, melynek területe $T = 100$ (cm^2).	1 pont	Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.
 A gúla m magassága egy olyan derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója 10 (cm),	1 pont*	
másik befogója (az alaplap átlójának fele): $\frac{10\cdot\sqrt{2}}{2} (= \sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm).	1 pont*	
(Így a Pitagorasz-tétel értelmében:) $m^2 = 100 - 50 = 50$,	1 pont*	
amiből ($m > 0$ miatt) $m = \sqrt{50} (\approx 7{,}07\,\text{cm})$.	1 pont	
A gúla térfogata $V = \frac{Tm}{3} = \frac{100\cdot\sqrt{50}}{3} (\approx 236)$ cm^3.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

 A gúla m magassága egy olyan derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója 5 (cm),	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.
átfogója (egy 10 cm oldalú szabályos háromszög magassága): $\frac{10\cdot\sqrt{3}}{2} (= \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm).	1 pont	
(Így a Pitagorasz-tétel értelmében:) $m^2 = 75 - 25 = 50$,	1 pont	

18. b) **első megoldás**		
 (Mivel a kocka *BA* éle merőleges az *ADHE* oldallapra, ezért) a *HAB* szög nagysága 90°.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt*
A kocka élének hosszát *a*-val jelölve $AH = a \cdot \sqrt{2}$,	1 pont	
így $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$,	1 pont	
amiből ($0° < \alpha < 90°$ miatt) $\alpha \approx 54{,}74°$.	1 pont	*Bármilyen helyes kerekítés (pl. 55°) esetén jár ez a pont.*
Összesen:	**4 pont**	

18. b) **második megoldás**		
A kocka élének hosszát *a*-val jelölve $AH = a \cdot \sqrt{2}$, $BH = a \cdot \sqrt{3}$.	1 pont	
Az *ABH* háromszögben felírható koszinusztétel: $2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\alpha$,	1 pont	
amiből $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$,	1 pont	
így ($0° < \alpha < 90°$ miatt) $\alpha \approx 54{,}74°$.	1 pont	*Bármilyen helyes kerekítés (pl. 55°) esetén jár ez a pont.*
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy általa választott élhosszúságú kockából jól számolja ki a szöget, akkor teljes pontszámot kaphat.

18. c)		
A gömböket jelölje a megadott fokszámok sorrendjében *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* és *G*. Az *A* gömb mindegyik másik gömbbel össze van kötve.	1 pont	
Mivel *G* elsőfokú gömb, ezért csak *A*-val van összekötve.	1 pont	
F is elsőfokú gömb, ezért *F* is csak *A*-val van összekötve.	1 pont	
Ezek szerint *B* csak *A*-val, *C*-vel, *D*-vel és *E*-vel lehet összekötve, vagyis nem lehet ötödfokú.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy olyan 7 csúcsú gráfot rajzol, amely tükrözi a feladat megértését, de szövegesen nem indokolja az ellentmondást, akkor 2 pontot kaphat.

18. d) első megoldás		
Mindegyik felhasznált pálcika két gömböt köt össze, így az egyes csúcsokból induló pálcikákat megszámolva minden felhasznált pálcikát kétszer számolunk meg.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Így az összes (jól) feljegyzett szám összege éppen kétszerese a pálcikák számának.	1 pont	
A pálcikák száma tehát: $\frac{6+5+3+3+2+2+1}{2}=11$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. d) második megoldás		
A gömböket tekintsük egy gráf csúcsainak, a gömböket összekötő pálcikákat pedig a gráf éleinek.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
Ebben a gráfban a csúcsok fokszámának összege az élek számának kétszerese.	1 pont	
A pálcikák száma tehát: $\frac{6+5+3+3+2+2+1}{2}=11$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy helyesen felrajzolt gráfból adja meg az élek (pálcikák) számát, akkor ez a 3 pont jár.